2 TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

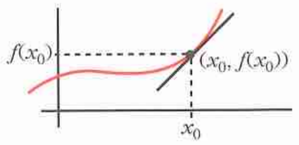
2.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. FUNCIÓN DERIVADA

- **Tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, $y = f(x)$, en un intervalo $[x_0, x_0 + \mathrm{h}]$ es la variación relativa de f con relación a x en ese intervalo; es decir:

  $$\text{T.V.M. } [x_0, x_0 + \mathrm{h}] = \frac{f(x_0 + \mathrm{h}) - f(x_0)}{\mathrm{h}}$$

- **Derivada de un punto**

  $$f'(x_0) = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{f(x_0 + \mathrm{h}) - f(x_0)}{\mathrm{h}}$$



  $f'(x_0)$ es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ y mide el crecimiento de la función en ese punto.

- **Derivadas laterales**

  Derivada por la izquierda de f en x_0 es $f'(x_0^-) = \lim_{\mathrm{h} \to 0^-} \frac{f(x_0 + \mathrm{h}) - f(x_0)}{\mathrm{h}}$

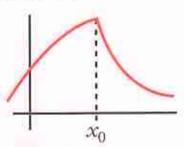
  Derivada por la derecha de f en x_0 es $f'(x_0^+) = \lim_{\mathrm{h} \to 0^+} \frac{f(x_0 + \mathrm{h}) - f(x_0)}{\mathrm{h}}$

- **Derivabilidad y derivadas laterales**

  PUNTO ANGULOSO

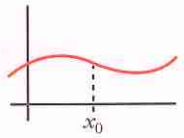
  $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$

  Función no derivable en x_0



  FUNCIÓN DERIVABLE EN x_0

  $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$



1 Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2 Halla, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $(4, 2)$.

3 Calcula, a partir de la definición, el valor de $f'(-1)$, siendo $f(x) = \frac{2}{x + 2}$.

4 Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x)$ en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$, siendo:

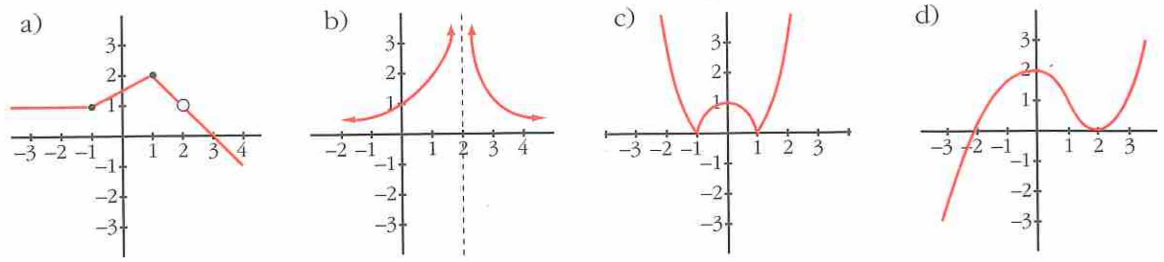
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

$f(x)$ es derivable en un punto $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en ese punto.

(Por tanto, si $f(x)$ no es continua en un punto, no puede ser derivable en él).

5 Indica en qué puntos no son derivables cada una de las siguientes funciones:



6 Si la gráfica de $f(x)$ es la del apartado a) del ejercicio anterior, calcula $f'(-2)$, $f'(0)$ y $f'(3)$.

7 Halla, a partir de las definiciones, las derivadas laterales de las siguientes funciones en $x = 1$ y di si existe $f'(1)$ en cada caso:

a) $f(x) = |x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

8 Averigua si la siguiente función es derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 12x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

FUNCIÓN DERIVADA Y DERIVADAS SUCESIVAS

La función derivada de f es $f'(x) = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{f(x + \mathrm{h}) - f(x)}{\mathrm{h}}$ para una x cualquiera.

Si f' es derivable, su derivada se llama f''.

Así, sucesivamente, se definen f''', f^{iv} ...

9 Halla, a partir de la definición, la derivada de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{3x}{x + 2}$

2.2 REGLAS DE DERIVACIÓN

SUMA	$D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$	
PRODUCTO POR UN NÚMERO	$D[k\cdot f(x)] = k\,f'(x)$	
PRODUCTO	$D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	
COCIENTE	$D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$	
COMPOSICIÓN (Regla de la cadena)	$D\{f[g(x)]\} = f'[g(x)]\cdot g'(x)$ $D\{f(g[h(x)])\} = f'(g[h(x)])\cdot g'[h(x)]\cdot h'(x)$	
POTENCIA	$D(x^k) = k\cdot x^{k-1}$	$D[f(x)^k] = k\,f(x)^{k-1}\cdot f'(x)$
	$D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$D[\sqrt{f(x)}] = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$
	$D\left(\dfrac{1}{x}\right) = D(x^{-1}) = -\dfrac{1}{x^2}$	$D\left[\dfrac{1}{f(x)}\right] = -\dfrac{1}{f(x)^2}\cdot f'(x)$
TRIGONOMÉTRICAS	$D(sen\,x) = cos\,x$	$D[sen\,f(x)] = cos\,f(x)\cdot f'(x)$
	$D(cos\,x) = -sen\,x$	$D[cos\,f(x)] = -sen\,f(x)\cdot f'(x)$
	$D(tg\,x) = 1 + tg^2\,x$	$D[tg\,f(x)] = [1 + tg^2\,f(x)]\cdot f'(x)$
FUNCIONES ARCO (Inversas o recíprocas de las trigonométricas)	$D(arc\,sen\,x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D[arc\,sen\,f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$
	$D(arc\,cos\,x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D[arc\,cos\,f(x)] = \dfrac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$
	$D(arc\,tg\,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$D[arc\,tg\,f(x)] = \dfrac{1}{1+f(x)^2}\cdot f'(x)$
EXPONENCIALES	$D(e^x) = e^x$	$D[e^{f(x)}] = e^{f(x)}\cdot f'(x)$
	$D(a^x) = a^x\cdot ln\,a$	$D[a^{f(x)}] = a^{f(x)}\cdot ln\,a\cdot f'(x)$
LOGARÍTMICAS	$D(ln\,x) = \dfrac{1}{x}$	$D[ln\,f(x)] = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
	$D(log_a x) = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{ln\,a}$	$D[log_a f(x)] = \dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{ln\,a}\cdot f'(x)$

Halla la derivada de cada una de estas funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^6}{5} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{1}{5}$ $\to f'(x) =$
2. $f(x) = \dfrac{-3x^2}{2} - \dfrac{5}{x} + 2$ $\to f'(x) =$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{x}$ $\to f'(x) =$
4. $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$ $\to f'(x) =$
5. $f(x) = \sqrt{2x} - \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{3}$ $\to f'(x) =$
6. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{7}$ $\to f'(x) =$
7. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x}$ $\to f'(x) =$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x} - e^4}$ $\to f'(x) =$
9. $f(x) = (x+2)e^x$ $\to f'(x) =$
10. $f(x) = (3x-1)cos\,x$ $\to f'(x) =$
11. $f(x) = (x+2)^2 - ln(x+1)$ $\to f'(x) =$
12. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ $\to f'(x) =$
13. $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ $\to f'(x) =$
14. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x^2+1}$ $\to f'(x) =$
15. $f(x) = (x^2+3)e^x$ $\to f'(x) =$
16. $f(x) = 2^x + tg(x-1)$ $\to f'(x) =$
17. $f(x) = ln(x^2-3)$ $\to f'(x) =$
18. $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^5$ $\to f'(x) =$
19. $f(x) = \dfrac{2x}{(x-2)^3}$ $\to f'(x) =$
20. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{cos\,x}$ $\to f'(x) =$

Halla la derivada de cada una de las siguientes funciones:

21 $f(x) = ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right) \rightarrow f'(x) =$

22 $f(x) = x^2 e^x - x^3 \cos x \rightarrow f'(x) =$

23 $f(x) = 3^{2x^2+1} \cdot ln(5x+1) \rightarrow f'(x) =$

24 $f(x) = sen^2\left(2\sqrt{x}+3\right) \rightarrow f'(x) =$

25 $f(x) = \dfrac{e^{2x^2}}{ln\, x} \rightarrow f'(x) =$

26 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+1} \rightarrow f'(x) =$

27 $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-2}} \rightarrow f'(x) =$

28 $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} \rightarrow f'(x) =$

29 $f(x) = ln[\cos(x^2-1)] \rightarrow f'(x) =$

30 $f(x) = \dfrac{1+tg\, x}{1-tg\, x} \rightarrow f'(x) =$

31 $f(x) = ln(e^{\cos x}) \rightarrow f'(x) =$

32 $f(x) = \sqrt{2^{x-1}} \rightarrow f'(x) =$

33 $f(x) = ln(sen\, x \cdot \cos x) \rightarrow f'(x) =$

34 $f(x) = sen\left(\sqrt{x}\right) + \cos^2\left(\sqrt{x}\right) \rightarrow f'(x) =$

35 $f(x) = \cos\left(2x^3 - 2\sqrt[3]{3x}\right) \rightarrow f'(x) =$

36 $f(x) = arc\ tg\left(\dfrac{3x+1}{2}\right) \rightarrow f'(x) =$

37 $f(x) = arc\ sen\left(\sqrt{x+1}\right) \rightarrow f'(x) =$

38 $f(x) = arc\ cos\,(x^3-2) \rightarrow f'(x) =$

39 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \rightarrow f'(x) =$

40 $f(x) = log_2\left(\dfrac{3x+1}{x^2+1}\right) \rightarrow f'(x) =$

41 $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{2x+3}} \rightarrow f'(x) =$

42 Halla la derivada de estas funciones en los puntos que se indican en cada caso:

a) $f(x) = (x^2+1)\cdot e^x \rightarrow f'(0) =$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+1} \rightarrow f'(1) =$

c) $f(x) = sen^2 x + \cos 2x \rightarrow f'(\pi) =$

d) $f(x) = (x^2+1)^5 \rightarrow f'(-1) =$

e) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) =$

f) $f(x) = ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right) \rightarrow f'(6) =$

43 Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = 3x^6 - 2x + 1 \rightarrow f'(x) =$
$f''(x) =$
$f'''(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2} \rightarrow f'(x) =$
$f''(x) =$
$f'''(x) =$

c) $f(x) = xe^{3x} \rightarrow f'(x) =$
$f''(x) =$
$f'''(x) =$

d) $f(x) = (x+1)\, sen\, x \rightarrow f'(x) =$
$f''(x) =$
$f'''(x) =$

44 Halla la derivada n-ésima de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = \cos x$

2.3 DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN

$f'(x_0)$ existe si las derivadas laterales existen y coindicen:

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

EJERCICIO RESUELTO

Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{si } x \le 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x \le 3 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Para ver si $f(x)$ es derivable, primero tenemos que comprobar si es continua (recuerda que si no es continua en un punto, no puede ser derivable en él).

Continuidad

- Si $x \ne 0$ y $x \ne 3 \to f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 0 \to$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x^2 + 2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \\ f(x) \text{ es continua en } x = 0 \end{array}$
- En $x = 3 \to$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 3) = 6 \\ f(3) = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \\ f(x) \text{ es continua en } x = 3 \end{array}$

Por tanto, $f(x)$ es una función continua.

Derivabilidad

- Si $x \ne 0$ y $x \ne 3 \to f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- En $x = 0 \to$ $\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\}$ Las derivadas laterales coinciden, luego $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 2$.
- En $x = 3 \to$ $\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 2 \\ f'(3^+) = 6 \end{array}\right\}$ No coinciden, luego $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

1 Estudia la derivabilidad de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2^{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = x^2\,|x| = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x \le 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2 Halla el valor de a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$ (recuerda que antes debes asegurarte de que la función sea continua):

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x + a & \text{si } x \le 1 \\ bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3 Dada la siguiente función, calcula el valor de m y de n para que sea derivable:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ 3x + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4 Dada la función $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$, defínela como función "a trozos", estudia su continuidad y su derivabilidad, y represéntala gráficamente.

5 Dada la siguiente funció, estudia su derivabilidad y averigua si hay algún punto en el que $f'(x) = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \le 2 \\ x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2.4 DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA DE OTRA

Conociendo la derivada de una función, f, podemos obtener la derivada de su función inversa o recíproca, f^{-1}, como sigue:

$$f(f^{-1}(x)) = x \xrightarrow{\text{Derivando}} f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

EJERCICIO RESUELTO

a) Sabemos que la derivada de $f(x) = x^5$ es $f'(x) = 5x^4$. Teniendo en cuenta este resultado, obtén la derivada de su función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$.

b) La función inversa de $f(x) = \cos x$ es $f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$. Teniendo esto en cuenta, obtén la derivada de $f^{-1}(x)$.

Resolución

a) $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{5\,(\sqrt[5]{x})^4} = \dfrac{1}{5\,(\sqrt[5]{x^4})}$

b) $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{-sen\,(\text{arc cos } x)} \overset{(*)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\text{arc cos } x)}} \overset{(**)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(*) $sen^2\,x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow sen\,x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

Nos quedamos con el valor negativo, porque sabemos que la función arccos$x$ es decreciente, luego su derivada es negativa.

(**) Como son funciones inversas, $\cos\,(\text{arc cos } x) = x$

1. Teniendo en cuenta que la derivada de $f(x) = x^9$ es $f'(x) = 9x^8$, obtén la derivada de $f^{-1}(x) = \sqrt[9]{x}$.

2. Sabemos que la derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$. Teniendo esto en cuenta, obtén la derivada de su función inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

3. Sabemos que la derivada de $f(x) = sen\,x$ es $f'(x) = \cos x$. Obtén la derivada de su función inversa, $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$.

2.5 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN IMPLÍCITA

EJERCICIO RESUELTO

Halla la derivada de la función $x^2 + y^2 - 5xy + 17 = 0$ en el punto (3, 2).

Resolución

Comprobamos que la función pasa por el punto (3, 2):

$$x^2 + y^2 - 5xy + 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3^2 + 2^2 - 5 \cdot 3 \cdot 2 + 17 = 9 + 4 - 30 + 17 = 0$$

Derivamos en forma implícita:

$2x + 2y \cdot y' - 5(y + xy') = 0$. Despejamos y':

$2x + 2yy' - 5y - 5xy' = 0$

$2yy' - 5xy' = 5y - 2x$

$y'\,(2y - 5x) = 5y - 2x$

$y' = \dfrac{5y - 2x}{2y - 5x}$

Sustituimos las coordenadas de (3, 2) para obtener la derivada en ese punto:

$$y'(3, 2) = \frac{5 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 5 \cdot 3} = \frac{10-6}{4-15} = \frac{4}{-11} = \frac{-4}{11}$$

1. Halla la derivada de las siguientes funciones dadas en forma implícita:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

b) $x^2 - y^2 + xy = 1$

c) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

d) $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

e) $x^4 + y^4 + 3xy = 0$

f) $\cos\,(x + y) - y^2 + 3x = 3\pi - 1$

2. Comprueba que $e^{xy} + 2x - 3y + y^2 = 3$ pasa por el punto (1, 0), y halla su derivada en ese punto.

3. Obtén las coordenadas de los puntos en los que se anula la derivada de $2x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$.

2.6 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

El cálculo de la derivada de algunas funciones se simplifica notablemente si tomamos previamente logaritmos y tenemos en cuenta su propiedades:

$ln\,(A \cdot B) = ln\,A + ln\,B$ $\qquad$ $ln\left(\frac{A}{B}\right) = ln\,A - ln\,B$ $\qquad$ $ln\,(A)^B = B\,ln\,A$

EJERCICIO RESUELTO

Calcula la derivada de la función $y = x^{x^2+1}$

RESOLUCIÓN

Tomamos logaritmos antes de derivar:

$$y = x^{x^2+1} \;\Rightarrow\; ln\,y = ln\,x^{x^2+1} \;\Rightarrow\; ln\,y = (x^2+1)\cdot ln\,x$$

Derivamos:

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot ln\,x + (x^2+1)\cdot\frac{1}{x}$$

$$y' = y\left[2x\,ln\,x + \frac{x^2+1}{x}\right]$$

$$y' = x^{x^2+1}\left[2x\,ln\,x + \frac{x^2+1}{x}\right]$$

1 Halla la derivada de cada una de estas funciones:

a) $y = x^{x+1}$ $\qquad$ b) $y = (x+1)^x$ $\qquad$ c) $y = x^{2x}$

d) $y = x^{cos\,x}$ $\qquad$ e) $y = (x+1)^{e^x}$ $\qquad$ f) $y = (x^2+1)^x$

g) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ $\qquad$ h) $y = (tg\,x)^x$ $\qquad$ i) $y = x^{ln\,x}$

j) $y = (2-x)^x$ $\qquad$ k) $y = (ln\,x)^x$ $\qquad$ l) $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

m) $y = \sqrt[x]{x} = x^{1/x}$ $\qquad$ n) $y = (1+e^x)^x$ $\qquad$ ñ) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$

2.7 EJERCICIOS DE RECAPITULACIÓN (DERIVADAS)

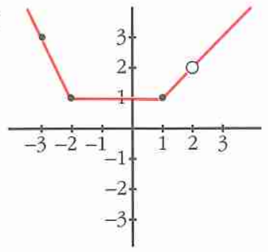
1 Halla, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

2 Obtén, a partir de la definición, la derivada de cada una de las siguientes funciones:

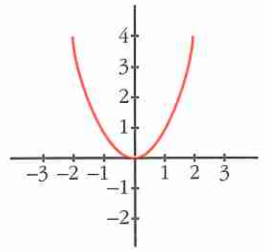
a) $f(x) = 5x^2 + 1$ $\qquad$ b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $\qquad$ c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

3 Indica en qué puntos no son derivables cada una de las siguientes funciones. Razona tu respuesta:

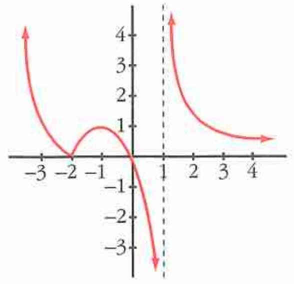
a)



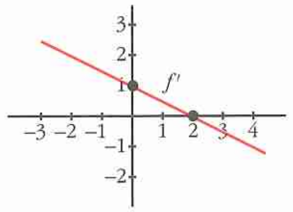
b)



c)



4 La siguiente gráfica corresponde a la derivada, $f'(x)$, de una función $f(x)$.



a) Explica por qué sabemos que $f(x)$ es una función polinómica de segundo grado.

b) Di cuál es la abscisa del vértice de la parábola que corresponde a $f(x)$.

5 Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = (x^2+1)\,e^{2x}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

b) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

Halla la derivada de cada una de las siguientes funciones:

6 $f(x) = \left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^2 \quad \to f'(x) =$

7 $f(x) = \sqrt[3]{\cos(x^2-2)} \quad \to f'(x) =$

8 $f(x) = \sqrt{x}\, e^x \quad \to f'(x) =$

9 $f(x) = \ln\left(\sqrt{x+2}\right) \quad \to f'(x) =$

10 $f(x) = 3^x \cdot sen^2(2x+3) \quad \to f'(x) =$

11 $f(x) = \left(\dfrac{(3-x)}{3+x}\right)^{2/5} \quad \to f'(x) =$

12 $f(x) = tg^2(x^2-2) \quad \to f'(x) =$

13 $f(x) = (2-x)^3 - arc\,tg\,(x^2+1) \quad \to f'(x) =$

14 $f(x) = \sqrt[5]{x^2+1} - \dfrac{2}{x} + \log_2 x \quad \to f'(x) =$

15 $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{(1-x)^2} \quad \to f'(x) =$

16 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{x^2+1} \quad \to f'(x) =$

17 $2x^2 - 3y^2 + e^x + e^y = 0 \quad \to y' =$

18 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0 \quad \to y' =$

19 $y = x^{2sen\,x} \quad \to y' =$

20 $y = (x-1)^{ex} \quad \to y' =$

21 Halla la derivada de estas funciones en los puntos que se indican en cada caso:

a) $f(x) = (x-2)\, e^{x^2-1} \quad \to f'(1) =$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x+2)^2} \quad \to f'(4) =$

c) $f(x) = (\cos^2 x - tg\,x)^3 \quad \to f'(0) =$

d) $f(x) = \ln \dfrac{x+3}{2x+1} \quad \to f'(2) =$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}} \quad \to f'(3) =$

22 Demuestra que, si $f(x) = arc\,sen\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

23 Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \cos x^2$, calcula la derivada de $H(x) = f[g(x)]$ y la de $J(x) = g[f(x)]$.

24 Comprueba que $sen\,(2x+y) - e^x + e^y + y^2 = 0$ pasa por (0, 0) y halla su derivada en ese punto.

25 Halla los puntos en los que se anula la derivada para cada una de estas funciones:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ b) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

26 Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x) = 3x^2 + |x+1|$.

27 Estudia la derivabilidad de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

28 Calcula el valor de a y b para que la siguiente función sea derivable en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

29 Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función según los valores de m y n:

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x + 5 & \text{si } x \le 1 \\ 5x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0;\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty;$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2;\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1;$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2;$

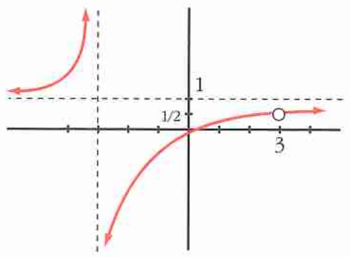
2 a) Indeterminado b) 0

c) 0 d) Indeterminado

e) Indeterminado f) Indeterminado

3 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{1}{2};\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$



4 a) 0 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{3}$

d) $+\infty$ e) 0 f) $\frac{1}{6}$

g) $+\infty$ h) $+\infty$ i) $\frac{1}{4}$

Página 19

5 a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty;$ b) 0 c) 1

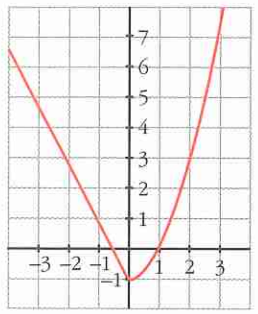
d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{2}$ f) 0 g) $e^{3/5}$ h) e^{-1} i) $+\infty$

6 a) Continua si $x \neq 0$. Discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

b) Continua si $x \neq -1$. Discontinuidad infinita (asintota vertical) en $x = -1$.

7 a) $m = 1,\ n = 4$

b)



8 $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

Página 20

1 $f'(2) = 1$

2 $f'(4) = \frac{1}{4}$

3 $f'(-1) = -2$

4 $f'(-1) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2};\ f'(3) = \frac{1}{4}$

Página 21

5 a) No es derivable en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$. En $x = -1$ y $x = 1$ hay puntos angulosos (derivadas laterales distintas); en $x = 2$ no está definida.

b) No es derivable en $x = 2$, pues no es continua en ese punto.

c) No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$; hay punto angulosos (derivadas laterales distintas).

d) Es derivable.

6 $f'(-2) = 0;\ f'(0) = \frac{1}{2};\ f'(3) = -1$

7 a) $f'(1^-) = -1;\ f'(1^+) = 1$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

b) $f'(1^-) = 2;\ f'(1^+) = 2$

Como coinciden, y $f(x)$ es continua en $x = 1$, $f(x)$ es derivable en $x = 1$ y su derviada es $f'(1) = 2$.

8 La función no es continua en $x = 2$.

9 a) $f'(x) = 6x$ b) $f'(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$

Página 23

1 $f'(x) = \frac{6x^5}{5} - 3x$

2 $f'(x) = -3x + \frac{5}{x^2}$

3 $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2}$

4 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{2}{x^3}$

6 $f'(x) = \frac{3x^2 - 4x}{7}$

7 $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

8 $f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{3x}}$

9 $f'(x) = (x + 3)\, e^x$

10 $f'(x) = 3\cos x - 3x\, \text{sen}\, x + \text{sen}\, x$

11 $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{x + 1}$

12 $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}$

13 $f'(x) = \frac{-x + 1}{(x + 1)^3}$

14 $f'(x) = \frac{e^{3x}(3x^2 - 2x + 3)}{(x^2 + 1)^2}$

15 $f'(x) = (x^2 + 2x + 3)\, e^x$

16 $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 1 + tg^2\,(x - 1)$

17 $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 3}$

18 $f'(x) = \frac{15(x - 2)^4}{(x + 1)^6}$

19 $f'(x) = \frac{-4x - 4}{(x - 2)^4}$

20 $f'(x) = \frac{\cos x + 2x\, \text{sen}\, x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}$

Página 24

21 $f'(x) = \frac{-5}{x^2 - x - 6}$

22 $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x - 3x^2\cos x + x^3\, \text{sen}\, x$

23 $f'(x) = 3^{2^{x^2+1}}\left(4x \cdot \ln 3 \cdot \ln(5x + 1) + \frac{5}{5x + 1}\right)$

24 $f'(x) = \frac{\text{sen}\,(4\sqrt{x} + 6)}{\sqrt{x}}$

25 $f'(x) = \frac{e^{2x^2}(4x^2 \ln x - 1)}{x \ln^2 x}$

26 $f'(x) = \frac{-2x - 7}{2(2x + 1)^2\ \sqrt{x + 2}}$

27 $f'(x) = \frac{-5\sqrt{x - 2}}{2\sqrt{2x + 1}\,(x - 2)^2}$

28 $f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x - 1}{2x\sqrt{x}}$

29 $f'(x) = -2x\, tg\,(x^2 - 1)$

30 $f'(x) = \frac{2\,(1 + tg^2 x)}{(1 - tg\, x)^2}$

31 $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\text{sen}\, x$

32 $f'(x) = \frac{\sqrt{2^{x-1}} \cdot \ln 2}{2}$

33 $f(x) = \ln(\text{sen}\, x) + \ln(\cos x)$

$f'(x) = \frac{2}{tg\, 2x}$

34 $f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}\,(1 - 2\, \text{sen}\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

35 $f'(x) = -\left(6x^2 - \frac{2}{\sqrt[3]{9x^2}}\right) \text{sen}\left(2x^3 - 2\sqrt[3]{3x}\right)$

36 $f'(x) = \frac{6}{9x^2 + 6x + 5}$

37 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x^2 - x}}$

38 $f'(x) = \frac{-3x^2}{\sqrt{1 - (x^3 - 2)^2}}$

39 $f'(x) = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

40 $f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(3x + 1)(x^2 + 1)\ln 2}$

41 $f'(x) = \frac{\sqrt{2x + 3} + 1}{2\sqrt{(2x + 3)(x + \sqrt{2x + 3})}}$

Página 25

42 a) 1 b) 0 c) 0 d) –160 e) $\frac{5}{8\sqrt{6}}$ f) $\frac{5}{24}$

43 a) $f'(x) = 18x^5 - 2$

$f''(x) = 90x^4$

$f'''(x) = 360x^3$

b) $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$

$f'''(x) = \frac{-6}{(x+2)^4}$

c) $f'(x) = (3x+1)e^{3x}$

$f''(x) = (9x+6)e^{3x}$

$f'''(x) = (27x+27)e^{3x}$

d) $f'(x) = sen\, x + (x+1)\cos x$

$f''(x) = 2\cos x - (x+1)\, sen\, x$

$f'''(x) = -3sen\, x - (x+1)\cos x$

44 a) $f^n(x) = 3^n e^{3x}$

b) $f^n(x) = \begin{cases} -sen\, x & si\ n = \dot{4}+1 \\ -\cos x & si\ n = \dot{4}+2 \\ sen\, x & si\ n = \dot{4}+3 \\ \cos x & si\ n = \dot{4} \end{cases}$

NOTA: $\dot{4}$ significa múltiplo de 4.

Página 27

1 a) Continua en ℝ. Derivable en $x = 1$, pero no en $x = 2$. Si $x \neq 1$ y $x \neq 2$, es derivable.

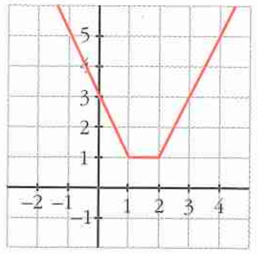
b) Continua y derivable en ℝ.

2 $a = 2;\ b = 3$

3 $m = -3;\ n = 3$

4 $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si\ x \le 1 \\ 1 & si\ 1 < x \le 2 \\ 2x-3 & si\ x > 2 \end{cases}$

Continua en ℝ, pues es la suma de dos funciones continuas.



5 Continua en ℝ.

Derivable si $x \neq 2$. En $x = 2$ es derivable, pues no coinciden las derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si\ x < 2 \\ 1 & si\ x > 2 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ en $x = 0$; es decir, en el punto (0, 2).

Página 28

1 $\frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$

2 $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

3 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Página 29

1 a) $2x + 2y \cdot y' - 4 - 6y' = 0;\ y' = \frac{-2-x}{y-3}$

b) $2x - 2y \cdot y' + y + xy' = 0;\ y' = \frac{-2x-y}{x-2y}$

c) $\frac{2x}{25} + \frac{2y \cdot y'}{4} = 0;\ y' = \frac{-4x}{25y}$

d) $\frac{2(x+1)}{4} - \frac{2(y-2)\,y'}{9} = 0$

$$y' = \frac{9(x+1)}{4(y-2)} = \frac{9x+9}{4y-8}$$

e) $4x^3 + 4y^3 \cdot y' + 3y + 3x \cdot y' = 0$

$$y' = \frac{-4x^3-3y}{4y^3+3x}$$

f) $(-sen\,(x+y)) \cdot (1+y') - 2y \cdot y' + 3 = 0$

$$y' = \frac{-3+sen\,(x+y)}{-2y-sen\,(x+y)} = \frac{3-sen\,(x+y)}{2y+sen\,(x+y)}$$

2 $y' = \frac{-2-ye^{xy}}{xe^{xy}-3+2y};\ y' = (1, 0) = 1$

3 $y' = \frac{8-4x}{2y+2};\ y' = 0 \rightarrow x = 2$

$8 + y^2 - 16 + 2y + 5 = 0 \rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0$

$y = 1 \rightarrow$ Punto (2, 1)

$y = -3 \rightarrow$ Punto (2, –3)

Página 30

1 a) $y' = x^{x+1}\left[ln\, x + \frac{x+1}{x}\right]$

b) $y' = (x+1)^x\left[ln\,(x+1) + \frac{x}{x+1}\right]$

c) $y' = x^{2x}\left[2(ln\, x) + 2\right]$

d) $y' = x^{\cos x}\left[-sen\, x\, ln\, x + \frac{\cos x}{x}\right]$

e) $y' = (x+1)^{e^x}\left[e^x\, ln\,(x+1) + \frac{e^x}{x+1}\right]$

f) $y' = (x^2+1)^x\left[ln\,(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right]$

g) $y' = \left(\frac{1}{x}\right)^x\left[ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]$

h) $y' = (tg\, x)^x\left[ln\,(tg\, x) + \frac{x\,(1+tg^2 x)}{tg\, x}\right]$

i) $y' = x^{ln\, x}\left[\frac{2ln\, x}{x}\right]$

j) $y' = (2-x)^x\left[ln\,(2-x) - \frac{x}{2-x}\right]$

k) $y' = (ln\, x)^x\left[ln\,(ln\, x) + \frac{1}{ln\, x}\right]$

l) $y' = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left[ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\right]$

m) $y' = \sqrt[x]{x}\left[\frac{1-ln\, x}{x^2}\right]$

n) $y' = (1+e^x)^x\left[ln\,(1+e^x) + \frac{x\,e^x}{1+e^x}\right]$

ñ) $y' = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}\left[2ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{4x}{x^2-1}\right]$

Página 31

1 $f'(1) = \frac{1}{4}$

2 a) $f'(x) = 10x$

b) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

3 a) No es derivable en $x = -2$, $x = 1$ y $x = 2$. En $x = -2$ y en $x = 1$ hay puntos angulosos (derivadas laterales distintas) y en $x = 2$ no está definida.

b) Es derivable.

c) No es derivable en $x = -2$ ni en $x = 1$. En $x = -2$ hay un punto anguloso (derivadas laterales distintas) y en $x = 1$ no está definida.

4 a) Porque f' es una función lineal.

b) $f'(x) = 0$ en $x = 2$. Por tanto, la abscisa del vértice de la parábola es $x = 2$.

5 a) $f'(x) = (2x^2 + 2x + 2)e^{2x}$

$f''(x) = (4x^2 + 8x + 6)e^{2x}$

$f'''(x) = (8x^2 + 24x + 20)e^{2x}$

b) $f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^4}$

$f''(x) = \frac{12}{(x+1)^5}$

$f'''(x) = \frac{-60}{(x+1)^6}$

Página 32

6 a) $f'(x) = \frac{42x-14}{(x+2)^3}$

7 $f'(x) = \frac{-2x\, sen\,(x^2-2)}{3\sqrt[3]{\cos^2(x-2)}}$

8 $f'(x) = e^x\left(\frac{1+2x}{\sqrt{x}}\right)$

9 a) $f'(x) = \frac{1}{2x+4}$

10 $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 \cdot sen^2(2x+3) + 4 \cdot 3^x \cdot$
$\cdot\, sen\,(2x+3) \cdot cos\,(2x+3)$

11 $f'(x) = \dfrac{-12}{5(3-x)^{3/5}(3+x)^{7/5}}$

12 $f'(x) = 4x\, tg\,(x^2-2)\left(1 + tg^2\,(x^2-2)\right)$

13 $f'(x) = -3(2-x)^2 - \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$

14 $f'(x) = \dfrac{2x}{5\sqrt[5]{(x^2+1)^4}} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x\ln 2}$

15 $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}(1 - x + 4\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\,(1-x)^3}$

16 $f'(x) = \dfrac{(x^2-2x+1)\,e^x - (x^2+2x)\,e^{-x}}{(x^2+1)^2}$

17 $y' = \dfrac{-4x - e^x}{e^y - 6y}$

18 $y' = \dfrac{1-x}{y+3}$

19 $y' = x^{2sen\,x}\left[2cos\,x\,\ln x + \dfrac{2sen\,x}{x}\right]$

20 $y' = (x-1)^{e^x}\left[e^x \ln(x-1) + \dfrac{e^x}{x-1}\right]$

21 a) -1 b) $-\dfrac{5}{432}$ c) -3 d) $\dfrac{-1}{5}$ e) $\dfrac{-3}{4}$

Página 33

22 $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)}} \cdot \dfrac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}} \cdot \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} =$

$= \cancel{\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{1}{(1+x^2)\cancel{\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{1}{1+x^2}$

23 $H(x) = cos^2 x^2 + 1$
$H'(x) = -2x\, sen\,(2x^2)$

$J(x) = cos\,(x^2+1)^2$
$J'(x) = 4x\,(x^2+1)\, sen\, x\,(x^2+1)^2$

24 $y' = \dfrac{e^x - 2cos\,(2x+y)}{2y + e^x + cos\,(2x+y)}$; $y' = (0,0) = \dfrac{-1}{2}$

25 a) $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f'(x) = 0$ en $(0, 5)$ y $(1, 4)$

b) $f'(x) = \dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$; $f'(x) = 0$ en $\left(-1, \dfrac{-1}{4}\right)$

26 $f(x)$ es continua, pues es composición de funciones continuas.

$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 3x^2 + x + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

$f(x)$ es derivable si $x \ne -1$. En $x = -1$ hay un punto anguloso (derivadas laterales distintas).

27 a) Es continua en $\mathbb{R}$. Es derivable si $x \ne 1$. En $x = 1$ no es derivable, pues no coinciden sus derivadas laterales.

b) Es continua en $\mathbb{R}$. Es derivable si $x \ne 0$. En $x = 0$ no es derivable, pues no coinciden sus derivadas laterales.

28 $a = 1$, $b = -1$

29 Para que sea derivable, tiene que ser $m = 1$, $n = 4$.

Página 34

1 a) $y = 4 - 6(x-2) \rightarrow y = -6x + 16$

b) $y = 2 + \dfrac{1}{16}(x-4) \rightarrow y = \dfrac{1}{16}x + \dfrac{7}{4}$

c) $y = 0$

d) $y = -2 - \dfrac{1}{7}(x-1) \rightarrow y = -\dfrac{1}{7}x - \dfrac{13}{7}$

2 $y = x + 5$

Página 35

3 $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{16}$

4 Recta tangente en (0, 2): $y = -2x + 2$
Recta tangente en (–2, –2): $y = -2x - 6$

5 Recta tangente en (–1, 5): $y = 5$
Recta tangente en (3, –27): $y = -27$

6 Recta tangente en (1, –1): $y = -2x + 1$
Recta tangente en (5, 7): $y = 6x - 23$

7 a) (1, 3) y $\left(13, \dfrac{3}{5}\right)$

b) Recta tangente en (1, 3): $y = -x + 4$

Recta tangente en $\left(13, \dfrac{3}{5}\right)$: $y = \dfrac{-1}{25}x + \dfrac{28}{25}$

Página 36

1 a) Máximo en (–2, 21); mínimo en (1, –6); creciente en $(-\infty, -2)\cup(1, +\infty)$; decreciente en (–2, 1).

b) Máximo en (0, 1); mínimo en (2, 9); creciente en $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$; decreciente en $(0, 1)\cup(1, 2)$.

c) No tiene máximos ni mínimos; decreciente en $(-\infty, 1)$; creciente en $(2, +\infty)$.

2 a) Mínimo en $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$; decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right)$; creciente en $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

b) Mínimo en (0, 2); decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, +\infty)$.

c) Mínimos en (–5, 0) y (1, 0); máximo en (–2, 9); decreciente en $(-\infty, -5)\cup(-2, 1)$; creciente en $(-5, -2)\cup(1, +\infty)$.

Página 37

3 a) Cóncava en $(-\infty, -2)\cup(0, +\infty)$; convexa en (–2, 0); puntos de inflexión en (–2, –17) y en (0, 3)

b) Convexa en $(-\infty, -3)$; cóncava en $(-3, +\infty)$; punto de inflexión en $(-3, -2e^{-3})$

4 a) Máximo

b) Mínimo

Página 38

1 Llamamos x e y a los números.
Máximo en $x = 32$, $y = 4$

2 Llamamos x, y, z a los números enteros.
Máximo para $x = 13$, $y = 26$, $z = 21$

3 Llamamos x a la base e y a cada uno de los lados iguales.
Máximo en $y = 20$, $x = 20$ (triángulo equilátero de 20 m de lado)

Página 39

4 Llamamos x a la base e y a la altura.
a) $x = 2{,}5$ m, $y = 1{,}6$ m
b) 80 €

5 a) $81\pi = \pi r^2 h \rightarrow h = \dfrac{81}{r^2}$

$C(r) = \dfrac{4\,860\pi}{r} + 90\pi r^2$

b) $r = 3$ m; h = 9 m

c) $2\,430\pi \simeq 7\,634{,}07$ €

6 a) Precio de venta = 130 + x
Nº de compradores = 1000 – $60x$
Ingresos = $(130 + x)(1000 - 60x)$
Costes = $80(1000 - 60x)$
Beneficio = Ingresos – Costes =
$= 50\,000 - 2000x - 60x^2$

b) $x = -16{,}\widehat{6} \simeq -16{,}67$ €
Precio de venta = 130 – 16,67 = 113,33 €